Teorema: (Exatidão à esquerda de Hom)

(1) A suc.

$$M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0 \Rightarrow M'' \cong M/\ker\beta = M/\mathrm{Im}\,\alpha$$

é exata sse $\forall N$

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\beta, N)} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\alpha, N)} \mathrm{Hom}_R(M', N)$$

é exata.

(2) $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M''$ é exata sse $\forall N$

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N, M') \to \mathrm{Hom}_R(N, M) \to \mathrm{Hom}_R(N, M'')$$

é exata

Dem: (1) $\Rightarrow$ claro

$\Leftarrow$: Se β n̄ é sobrejetivo, seja

$N \overset{?}{=} M''/\mathrm{Im}\,\beta$

$$\kappa : M'' \longrightarrow \underbrace{M''/\mathrm{Im}\,\beta}_{N} \quad \text{ñ é zero}$$

$$\mathrm{Hom}_R(\beta, N)(\kappa) = \kappa\beta = 0$$

(2) análogo

<u>Def</u>: Uma apresentação livre de M é uma sucessão exata

$$G \to F \to M \to 0$$

onde G, e F são R-mod. livres. Se F, G têm característica finita, então a apresentação é finita e M diz-se finita/ apresentado.

<u>NB</u>: Se M é um R-mod geradores m_λ, $\lambda \in \Lambda$ então temos uma seq exata

$$0 \to K \to R^{\oplus \Lambda} \longrightarrow M \to 0$$

escolhendo geradores para K, obtemos uma apresentação

$$R^{\oplus \Sigma} \to R^{\oplus \Lambda} \longrightarrow M \to 0$$

<u>NB</u>: Se K e M ~~é~~ são f.g. $\Rightarrow$ M é f.a.

Módulos Projetivos:

NB: $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ $(*)$

exata cinde-se se admite uma seção $\sigma : M'' \to M$:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\beta"] \\ M'' \arrow[ur, dashed, "\sigma"] \arrow[r, "1_{M''}"'] & M' \end{tikzcd}$$

Ora, se M'' for livre σ existe sempre!

Base $\{m''_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ para M'' $\Rightarrow$ basta definir

$$\sigma(m''_\lambda) = m_\lambda \in \beta^{-1}(m''_\lambda)$$

$\therefore$ Se M'' é livre, $(*)$ cinde-se sempre!

Def: Um R-mod P diz-se <u>projetivo</u>
$\forall\, M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} M''$ e $\forall\, P \xrightarrow{\alpha} M''$ $\exists\, \gamma : P \to M$
tq. o diagrama comute

$$\begin{tikzcd} & M'' \arrow[d, two heads, "\beta"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\exists\gamma"] \arrow[r, "\alpha"] & M \end{tikzcd}$$

γ diz-se um <u>levantamento de α</u>

Cor: P livre $\Longrightarrow$ P projetivo.

Teorema: ASASE:

(1) P é projetivo

(2) toda a suc. exata $0 \to N \to M \to P \to 0$ se cinde.

(3) P é somando direto de um módulo livre (i.e. Q t.g. $P \oplus Q$ é livre)

(4) $\forall\ M' \to M \to M''$ exata,

$$\mathrm{Hom}_R(P, M') \to \mathrm{Hom}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_R(P, M'')$$

é exata.

Dem: (1) $\Rightarrow$ (2)

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[d, two heads] \\
P \arrow[ur, dashed, "\exists \sigma"] \arrow[r, "1_P"'] & P
\end{tikzcd}$$

(2) $\Rightarrow$ (3)

$0 \to K \to R^{\oplus \Lambda} \to P \to 0$ exata curta

$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad R^{\oplus\Lambda} \simeq K \oplus P$

(3) $\Rightarrow$ (1)

$$
\begin{tikzcd}
 & & & M \arrow[d, two heads] \\
R^{\oplus\Lambda} \simeq P\oplus K \arrow[urrr, dashed, "\tilde{\sigma}"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] \arrow[rrr, bend right] & P \arrow[l, hook'] \arrow[urr, dashed, "\sigma ?"] \arrow[rr, two heads] & & M''
\end{tikzcd}
$$

$\sigma := \tilde{\sigma}\iota_2$

$\square$

<u>Cor</u>: Se R é DIP e P é projetivo, então P é livre.

Lema de Schanuel: Se

$0 \to L \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\alpha} M \to 0$ e $0 \to L' \xrightarrow{i'} P' \xrightarrow{\alpha'} M \to 0$

são exatas com P, P' projetivos, então

iso. de suc. exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \oplus P' \arrow[r, "i \oplus 1_{P'}"] \arrow[d, "\gamma'"] & P \oplus P' \arrow[r, "(\alpha\ 0)"] \arrow[d, "\gamma", "\simeq"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "1_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \oplus P \arrow[r, "i' \oplus 1_P"'] & P' \oplus P \arrow[r, "(\alpha'\ 0)"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Em particular, $L \Rightarrow L'$ projetivo.

L projetivo $\Rightarrow \exists K : K \oplus L$ é livre

$$L' \oplus P \simeq L \oplus P$$

$$L' \oplus K \oplus P \simeq \text{Livre} \oplus \underline{\text{Projetivo}}$$

Dem: $0 \to K \to P' \oplus P \xrightarrow{(\alpha' \ \alpha)} M \to 0$

... $\square$

Aplicação: Seja $0 \to L \to R^n \to M \to 0$ exata. Então M é f.a. sse L é f.g.

Dem: $\Leftarrow$ óbvia ✓

$\Longrightarrow$ M f.a. $\Leftarrow$ temos

$$0 \to K \to R^l \to M \to 0$$

com K f.g.

$\Rightarrow$ $L \oplus R^l \simeq K \oplus R^n$

$\Rightarrow L \simeq K \oplus R^n / N$ (com $N \simeq R^l$)

$\Rightarrow L$ f.g.

$\square$

Prop.: Seja $0 \to L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \to 0$ exata com L e N f.g., então M é f.g.

Dem.:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker\gamma_L \arrow[r] \arrow[d] & \ker\gamma_M \arrow[r] \arrow[d] & \ker\gamma_N \arrow[d] \arrow[dddll, bend left] & \\
0 \arrow[r] & R^\ell \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\gamma_L"'] & R^\ell \oplus R^n \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\gamma_M"] & R^n \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & \operatorname{coker}\gamma_M \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

$\therefore \operatorname{coker}\gamma_M = 0$

$\therefore \ker\gamma_M$ finita/ gerado

$\therefore M$ é f.g. $\square$

Prop.: Seja $0 \to L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \to 0$ exata tq. L é f.g. e M é f.a., então N é finita/ apr.

Dem.:

$$
\begin{tikzcd}
 & \ker \gamma \arrow[d] & & & \\
 & K \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & R^m \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "1_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

$\square$

Categorias:

Def: Categoria $\mathcal{C}$: coleção de objetos $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ e para $A, B \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ um conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ com op. comp.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$$
$$(\alpha, \beta) \longmapsto \beta\alpha$$

tq.

(1) associativo: $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$

(2) identidade: $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A)$ t.q.

$$\alpha 1_A = 1_B \alpha = \alpha$$

$$\forall \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$$

Def: Isomorfismo ...

Def: $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ cat., $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ é funtor:

$$F: \operatorname{ob}\mathcal{C} \to \operatorname{ob}\mathcal{C}'; \quad A \mapsto F(A)$$
$$F: \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(FA,FB)$$

t.q.
- $F(1_A) = 1_{FA}$
- $F(\alpha\beta) = F(\alpha)F(\beta)$

(F covariante)

NB: F preserva isomorfismos

Exemplos: Sets, Rings, R-mod,

R- alg. , $\mathcal{C}^{op}$

<u>Exemplos</u>: 1. F: Rings $\to$ Sets functor que esquece a estrutura.

2. R = anel F: Sets $\longrightarrow$ R-mod

$$F(\Lambda) := R^{\oplus \Lambda}$$

$$\alpha : \Lambda \to \Sigma$$

$$F(\alpha) : R^{\oplus \Lambda} \to R^{\oplus \Sigma}$$

$$F(\alpha)\left((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}\right) := (y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$$

$$y_\sigma := \sum_{\lambda \in \alpha^{-1}(\sigma)} x_\lambda$$

Def: Uma transf. natural entre $F, F' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, $\theta : F \to F'$ é uma coleção de morfismos

$$\theta(A) : F(A) \to F'(A), \quad A \in \mathcal{C}$$

tq.

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(\alpha)"] \arrow[d, "\theta(A)"'] & F(B) \arrow[d, "\theta(B)"] \\
F'(A) \arrow[r, "F'(\alpha)"] & F'(A)
\end{tikzcd}$$

$\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$

Def: $\mathcal{C}'^{\mathcal{C}} \equiv$ cat. dos functores $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$

<u>Exemplos</u>: 1. Λ conj.

$$\mathrm{Mod}_R \ni M \xmapsto{F_\Lambda} M^{\oplus\Lambda} \in \mathrm{Mod}_R$$

$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \longrightarrow F_\Lambda(\alpha) \in \mathrm{Hom}_R(M^{\oplus\Lambda}, M'^{\oplus\Lambda})$$

F_Λ é functor $\mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$

Dada uma função $f : \Sigma \to \Lambda$
obtemos uma transf. natural

$$\theta_f : F_\Lambda \to F_\Sigma$$

$$\theta_f(M) \in \mathrm{Hom}_R(M^{\oplus\Lambda}, M^{\oplus\Sigma})$$

$$(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \longmapsto (m_{f(\sigma)})_{\sigma\in\Sigma}$$

2. Se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ é functor

$$\theta(A) = 1_{F(A)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, FA)$$

é trans. natural $\theta : F \to F$.

K — .

$K \subset R^{\ell}$.

Ker $\quad L \to \operatorname{coker} g'$

$0 \to L \to R^{n} \to M \to 0$

$0 \to K \to R^{p} \to M \to 0$

$$L \oplus \mathbb{R}^n \cong K \oplus \mathbb{R}^p$$

$$\Rightarrow L \cong \underbrace{K \oplus \mathbb{R}^p}_{\text{f.g.}} / \mathbb{R}^n$$